全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

进阶手册

JINJIESHOUCE

知识 · 易错 · 拓展

主 编 肖德好

高中数学

必修第二册 RJA

CONTENTS 目录

进阶手册

第六章 平面向量及其应用

6.1 平面向量的概念 …… 进 01

6.2 平面向量的运算 …… 进 02

1. 平面向量的线性运算 …… 进 02

2. 平面向量的数量积 …… 进 06

6.3 平面向量基本定理及坐标表示 …… 进 09

6.4 平面向量的应用 …… 进 14

1. 平面向量在平面几何、物理中的应用 …… 进 14

2. 解三角形 …… 进 16

第七章 复数

7.1 复数的概念 …… 进 24

7.2 复数的四则运算 …… 进 26

7.3* 复数的三角表示 …… 进 29

第八章 立体几何初步

8.1 基本立体图形 …… 进 30

8.2 立体图形的直观图 …… 进 33

8.3 简单几何体的表面积与体积 …… 进 35

8.4 空间点、直线、平面之间的位置关系 …… 进 39

8.5 空间直线、平面的平行 …… 进 43

8.6 空间直线、平面的垂直 …… 进 50

第九章 统计

9.1 随机抽样 …… 进 57

9.2 用样本估计总体 …… 进 59

第十章 概率

10.1 随机事件与概率 …… 进 64

10.2 事件的相互独立性 …… 进 67

10.3 频率与概率 …… 进 69

第六章　平面向量及其应用

6.1　平面向量的概念

层级1　知识易错易混

【知识导图】

- 平面向量的概念
  - 向量
    - 定义
      - 既有大小又有方向的量叫作向量
      - 向量的大小叫作向量的长度(或模)
    - 表示
      - 书写用带箭头的单个小写字母，印刷用黑体$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…来表示向量
      - 以A为起点，B为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$
    - 向量与数量的区别
      - 向量有大小和方向—力、位移、速度等
      - 数量只有大小没有方向—身高、长度、面积、体积、质量等
    - 易错点—向量的长度可以比较大小，向量不能比较大小
  - 零向量
    - 长度为0的向量，其方向是任意的
    - 规定：$\mathbf{0}$与任一向量平行或共线
  - 单位向量—长度等于1个单位长度的向量—方向没有规定
  - 平行向量
    - 方向相同或相反的非零向量—$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$
    - 任一组平行向量都可以平移到同一条直线上，因此平行向量也叫作共线向量
    - 类型
      - 方向相同且模相等—方向相同且模不等
      - 方向相反且模相等—方向相反且模不等
  - 相反向量—长度相等且方向相反的向量—$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$
  - 相等向量
    - 长度相等且方向相同的向量—$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$
    - 注意
      - ①向量相等具有传递性，即$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$
      - ②向量的平行不具有传递性，若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，未必有$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，因为零向量与任意向量平行

【易错易混】理清平面向量的基本概念

(1)忽略零向量:零向量方向任意,规定与任意向量共线(或平行).

(2)共线向量与平行向量本质一致,但向量共线(或平行)与平面几何中的平行与共线易混淆.

(3)向量相等的内涵:既要方向相同,又要模相等.

例 1 (1)在下列结论中,错误的是　(　　)

A. “$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的必要不充分条件

B. “$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的既不充分也不必要条件

C. “$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”的充要条件

D. “$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反或$|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$”的充分不必要条件

(2)(多选题)下列说法中正确的有　(　　)

A. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$

B. 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$

C. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反

D. 若 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$ 共线,则 A,B,C 三点共线

[答案] (1)B　(2)BCD

[解析] (1)对于 A 与 B,向量相等既要满足方向相同,又要满足模相等,而向量平行只表明方向相同或相反,由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$推不出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,但由 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 可以推出 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,故 A 中结论正确,B 中结论错误;对于 C,根据向量相等的定义可知 C 中结论正确;对于 D,由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反或$|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$能推出 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$,充分性成立,而 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 无法推出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反或$|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$,必要性不成立,故 D 中结论正确. 故选 B.

(2)对于 A,如果 $\boldsymbol{b}$ 是零向量,那么 $\boldsymbol{b}$ 的方向任意,因为零向量与任意向量共线(或平行),所以当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 方向不相同

也不相反时，也满足题设条件，但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不平行，故 A 错误；对于 B，向量相等是指模相等且方向相同，具有传递性，所以 B 正确；对于 C，根据平行向量的概念可知 C 正确；对于 D，因为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 共线，且 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 有公共点 B，所以 A，B，C 三点共线，故 D 正确. 故选 BCD.

6.2 平面向量的运算

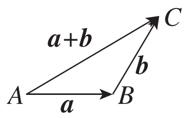
1. 平面向量的线性运算

层级1 知识易错易混

【知识导图】

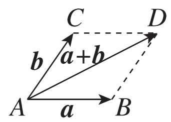
平面向量的线性运算

- 平面向量的加、减法
  - 平面向量的加法
    - ①三角形法则(首尾相连)



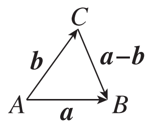
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

    - ②平行四边形法则(共起点)



$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

  - 平面向量的减法
    - 减去一个向量，等于加上他的相反向量



$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

- 平面向量的数乘
  - 代数角度——规定实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的积是一个向量，这种运算叫作向量的数乘
  - 几何角度

$\lvert\lambda\rvert>1$	$\lambda>1$	在原方向上伸长到原来的λ倍
	$\lambda<-1$	在反方向上伸长到原来的$-\lambda$倍
$0<\lvert\lambda\rvert<1$	$0<\lambda<1$	在原方向上缩短到原来的λ
	$-1<\lambda<0$	在反方向上缩短到原来的$-\lambda$

- 平面向量线性运算的基本方法
  - ①类比法：用于去括号、移项、合并同类项、提取公因式等变形.这里的“同类项”“公因式”是指向量，实数看作是向量的系数
  - ②方程法：把所求向量当作未知数，利用解方程的方法求解，同时在运算过程中多注意观察，恰当的运用运算律，简化运算
- 平面向量的共线定理
  - 向量$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$与$\boldsymbol{b}$共线的充要条件是：存在唯一一个实数$\lambda$，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$
  - ①向量共线定理中规定向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，因为如果$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，
    当$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{0}$，$\lambda$可以是任意实数，
    当$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$时，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{0}$，$\lambda$值不存在
  - ②当向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$同向时，$\lambda>0$，当向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$反向时，$\lambda<0$
- 三点共线
  - ①若$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，且$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$所在的直线无公共点，则这两条直线平行，
  - ②若$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，且$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$所在的直线有公共点，则这两条直线重合，
  - ③若A，B，C三点共线，O为直线外一点$\Leftrightarrow$存在实数x，y，使$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$，且$x+y=1$

【易错易混 1】向量加、减法运算错误

(1)法则理解与应用错误.

三角形法则：需注意“首尾相接”，若顺序颠倒或未正确连接，会导致结果错误.

平行四边形法则：要求两个向量“共起点”，若不满足此条件直接使用，会得出错误的和向量.

(2)向量方向与符号混淆.

(3)零向量书写错误.

例 1 (1)$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BM})+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=$________;

(2)$\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}=$________.

[答案] (1)$\overrightarrow{AB}$　(2)$\mathbf{0}$

[解析] (1)$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BM})+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$.

(2)$\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MN}=\mathbf{0}$.

【易错易混 2】根据平行或共线向量求参数

向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0})$与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是:存在唯一一个实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,定理中为什么规定 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$?

提示:若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,实数 λ 仍然存在,但 λ 可以是任意实数,不唯一;若 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$,$\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$,则不存在实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

例 2 设 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 为两个不共线的向量,若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{b}=-(2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)$共线,则实数 $\lambda=$________,此时 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 方向________.(填"相同"或"相反")

[答案] $-\dfrac{3}{2}$　相反

[解析] 因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{b}=-(2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)$共线,所以存在 $k\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2=-2k\boldsymbol{e}_1+3k\boldsymbol{e}_2$,因为 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 为两个不共线的向量,所以 $\begin{cases}1=-2k,\\ \lambda=3k,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2},\\ \lambda=-\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 即 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 方向相反.

层级2 解题方法拓展

【方法解读 1】利用向量加、减法的几何意义解决向量的模的问题

向量和差的几何意义:已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,则

(1)若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共起点,则利用平行四边形法则与三角形法则求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,可得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线;

(2)若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 首尾相接,则利用三角形法则求出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,可得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 围成一个三角形.

例 3 已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是非零向量,则"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$"是"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$"的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

[答案] B

[解析] 充分性:$\because\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\therefore\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时不能得到$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,$\therefore$充分性不成立. 必要性:$\because|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,$\therefore\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,$\therefore\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\therefore$必要性成立. 故"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$"是"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$"的必要不充分条件. 故选 B.

例 4 (1)平面上有三点 A,B,C,设 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$,$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$,若$|\boldsymbol{m}|=|\boldsymbol{n}|$,则　(　　)

A. A,B,C 三点必在同一条直线上

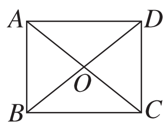
B. $\triangle ABC$ 必为等腰三角形,且 B 为顶角

C. $\triangle ABC$ 必为直角三角形,且 $B=90°$

D. $\triangle ABC$ 必为等腰直角三角形

[答案] C

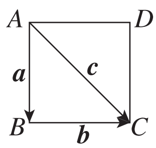
[解析] 以 AB,BC 为邻边作平行四边形 $ABCD$,如图,因为$|\boldsymbol{m}|=|\boldsymbol{n}|$,所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$,即$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{DB}|$,所以四边形 $ABCD$ 是矩形,故$\triangle ABC$ 是直角三角形,且 $B=90°$. 故选 C.



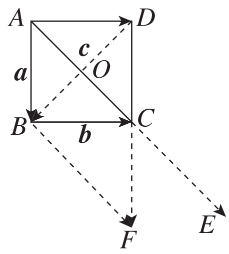
(2)如图所示,已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,求:

①$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$;

②$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.



解:①由已知得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,



$\because \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，$\therefore$ 延长 AC 到 E，使得 $|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{AC}|$，如图所示，

则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AE}$，且 $|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{2}$，$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=2\sqrt{2}$.

②作 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}$，连接 CF,DB，如图所示，则 $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DF}$，

$\because \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

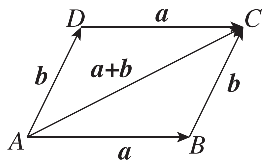
$\therefore |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}|=|\overrightarrow{DF}|$，又 $|\overrightarrow{DF}|=2$，$\therefore |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=2$.

【方法解读 2】向量加、减法的三角不等式的取等条件的运用

平面向量的三角不等式 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，描述了向量加法、减法与向量模之间的关系.

证明如下：(1) $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

根据平行四边形法则作图如右：

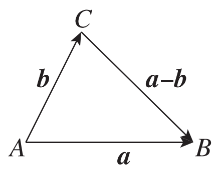


因为三角形中两边之和大于第三边，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$（当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同时等号成立）.

因为三角形中两边之差小于第三边，所以 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$（当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反时等号成立）. 所以 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

(2) $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

根据三角形法则作图如右，



因为三角形中两边之和大于第三边，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$（当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反时等号成立）.

因为三角形中两边之差小于第三边，所以 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$（当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同时等号成立）.

所以 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. 综上 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

例 5 对于任意三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，下列说法中正确的是 （　　）

A. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$　　B. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

C. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$　　D. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$

[答案] B

[解析] 对于 A，$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，A 错误；对于 B，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，B 正确；对于 C，向量不能比较大小，C 错误；对于 D，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$，都有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，故 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$ 不一定成立，D 错误. 故选 B.

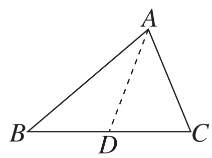
【方法解读 3】平面向量运算与三角形或四边形几何量的表示与结论

1. 三角形重心表示：

(1)在 $\triangle ABC$ 中，若 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$；

(2)已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\lambda\in(0,+\infty)$，则点 P 的轨迹一定经过 $\triangle ABC$ 的重心.

证明如下：如图，取 BC 的中点 D，连接 AD.



(1) $\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，$\therefore O$ 在 AD 上，$\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，

则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$.

(2) $\because \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\therefore \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AP}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\lambda\in(0,+\infty)$.

又 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，$\therefore \overrightarrow{AP}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=2\lambda\overrightarrow{AD}$，$\lambda\in(0,+\infty)$，

$\therefore$ 点 P 的轨迹一定经过 $\triangle ABC$ 的重心.

2. 平行四边形表示：已知 O 为四边形 $ABCD$ 所在平面内一点，且向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ 满足等式 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

例 6 (1)若 O 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，则 O 是 $\triangle ABC$ 的________.（填“重心”“垂心”“内心”或“外心”）

(2)设点 O 是面积为 4 的 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，则 $\triangle AOC$ 的面积为________.

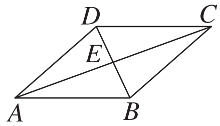
(3)［教材 P12 例 4 变式］已知 O 为四边形 $ABCD$ 所在平面内的一点，且向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ 满足等式 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，若点 E 为 AC 的中点，则 $\dfrac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle BCD}}=$ （　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

[答案] (1)重心　(2)1　(3)B

[解析] (1)由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，得 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OA}$. 取 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点为 D，连接 OD 并延长至 E 点，使 $\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OD}$，连接 BE 与 CE，根据向量加法的平行四边形法则得 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OD}$，即 $-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OD}$，所以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OD}$ 反向共线，且 $|\overrightarrow{OA}|=2|\overrightarrow{OD}|$，根据三角形重心的定义可知 O 是 $\triangle ABC$ 的重心.

(2)设 AB 的中点为 D，∵$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，∴$O$ 为 AB 边上的中线 CD 的中点，∴$\triangle AOC$，$\triangle AOD$，$\triangle BOD$ 的面积相等，∴$\triangle AOC$ 与 $\triangle AOB$ 的面积之比为 1∶2，同理 $\triangle BOC$ 与 $\triangle AOB$ 的面积之比为 1∶2，则 $\triangle AOC$ 的面积与 $\triangle BOC$ 的面积相等，则 $\triangle AOC$ 的面积等于 $\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\times 4=1$.



(3)∵向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ 满足等式 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，∴$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，即 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$，则四边形 $ABCD$ 为平行四边形，如图，∵E 为 AC 的中点，∴E 为对角线 AC 与 BD 的交点，则 $S_{\triangle EAB}=S_{\triangle ECD}=S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BCE}$，则 $\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{1}{2}$，故选 B.

【教材拓展 1】平面向量的共线定理及其推论

平面向量的三点共线定理：P 是直线 AB 外一点，C 是平面 PAB 内一点，根据平面向量基本定理，有且仅有一对实数 x,y，使得 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}$，则“$x+y=1$”是“$A,B,C$ 三点共线”的充要条件.

证明如下：

(1)充分性：

由 $x+y=1$ 及 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}$，得 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+(1-x)\overrightarrow{PB}$，即 $\overrightarrow{PC}=x(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})+\overrightarrow{PB}$，则 $\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}=x(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})$，即 $\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}$，所以向量 $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}$ 共线，又 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 有一个公共点 B，所以 A,B,C 三点共线.

(2)必要性：

由 A,B,C 三点共线可得向量 $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}$ 共线，根据两向量共线的定理可知，存在实数 x，使得 $\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}$. 故有 $\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}=x(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})$，移项合并后可得 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+(1-x)\overrightarrow{PB}$，令 $y=1-x$，

根据平面向量基本定理，有且仅有一对实数 x,y，使得 $\overrightarrow{PC}=x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}$，所以 $x+y=1$.

例 7 (1)在 $\triangle ABC$ 中，已知 D 是 AB 边上一点，若 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则 $\lambda=$________.

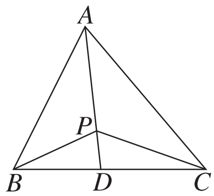
(2)点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，若 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ACP$ 的面积之比是________.

[答案] (1)$\frac{2}{3}$　(2)5∶6

[解析] (2)方法一：由 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，得 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=2(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$，即 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，所以 $\lambda=\frac{2}{3}$.

方法二：因为 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，所以 $\lambda=\frac{2}{3}$.

方法三：由 D 是 AB 边上一点知，A,B,D 三点共线. 又 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，所以 $\frac{1}{3}+\lambda=1$，因此 $\lambda=\frac{2}{3}$.



(2)如图，延长 AP 交 BC 于点 D，设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AP}$，则 $\overrightarrow{AD}=\frac{2\lambda}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AC}$，因为 B,C,D 共线，所以 $\frac{2\lambda}{5}+\frac{\lambda}{3}=1$，解得 $\lambda=\frac{15}{11}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{11}{15}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{6}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{11}\overrightarrow{AC}$，则 $S_{\triangle ABP}=\frac{11}{15}S_{\triangle ABD}$，$S_{\triangle ACP}=\frac{11}{15}S_{\triangle ACD}$，由 $\overrightarrow{AD}=\frac{6}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{11}\overrightarrow{AC}$ 得 $\frac{6}{11}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{5}{11}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$，即 $\frac{6}{11}\overrightarrow{BD}=\frac{5}{11}\overrightarrow{DC}$，所以 $\frac{BD}{CD}=\frac{5}{6}$，所以 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{5}{6}$，所以 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{\frac{11}{15}S_{\triangle ABD}}{\frac{11}{15}S_{\triangle ACD}}=\frac{5}{6}$.

【教材拓展 2】等和线

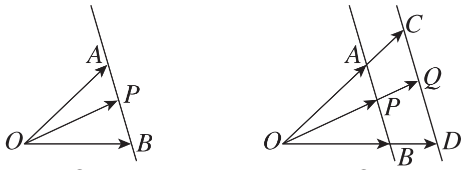
如图①，O 为直线 AB 外一点，P 是平面 OAB 内一点，则有且仅有一对实数 λ,μ，使得 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，若点 P 在直线 AB 上，则 $\lambda+\mu=1$.

(1)等和线定义：

在上面结论的基础上，将 $\lambda+\mu=1$ 推广到 $\lambda+\mu=k$ 可得到等和线，如图②. 由点 P 在直线 AB 上的任意性可知，点 Q 所在的直线 CD∥直线 AB，且直线 CD 上任意一点都满足 $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}(k\geqslant 0)$，故称直线 CD 为等和线.

(2)等和线定理：

如图②，A,B,P 三点共线，O 为直线 AB 外一点，CD 为与 AB 平行的直线，且 O,A,C 共线，O,B,D 共线，$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}(k\geqslant 0)$. 若点 Q 为 CD 上一点，$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda+\mu=k$.



① ②

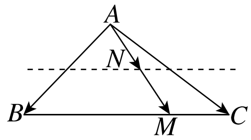
例 8 在△ABC 中,M 为边 BC 上任意一点,N 为 AM 的中点,$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,则 $\lambda+\mu$ 的值为 ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 1

[答案] A

[解析] 方法一:设 $\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BC}$,则 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{t}{2}\overrightarrow{AC}$,$\therefore\lambda=\frac{1}{2}-\frac{t}{2}$,$\mu=\frac{t}{2}$,$\therefore\lambda+\mu=\frac{1}{2}$.故选 A.

方法二:如图,过 N 作 BC 的平行线,设 $\lambda+\mu=k$,则 $k=\frac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AM}|}$.因为 N 为 AM 的中点,所以 $\frac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AM}|}=\frac{1}{2}$.故选 A.



2. 平面向量的数量积

层级1 知识易错易混

【知识导图】

- 平面向量的数量积
  - 夹角
    - 概念:已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,O是平面上的任意一点,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$叫作向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角,记作$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$
    - 范围
      - 夹角θ的范围是$[0,\pi]$
      - 当$\theta=0$时,两向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$共线且同向;当$\theta=\frac{\pi}{2}$时,两向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$相互垂直,记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;当$\theta=\pi$时,两向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$共线但反向
    - 易错点:只有两个向量的起点重合时对应的角才是两个向量的夹角
  - 数量积
    - 概念
      - 已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$,它们的夹角为θ,我们把数量$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$叫作向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积(或内积),记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$
      - 规定:零向量与任一向量的数量积为零
      - $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$或$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$
    - 运算律
      - 交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
      - 数乘结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$
      - 分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,向量数量积的运算不满足乘法结合律

【易错易混 1】平面向量的夹角

(1)在使用数量积定义的时候,很容易忽略共起点找夹角的要求.

(2)利用向量的数量积的性质、运算律与向量的线性运算解决与向量夹角相关问题时,容易忽略夹角的特殊情况.向量夹角的范围是 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.当 $\theta=0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向;当 $\theta=\pi$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向;当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直.

例 1 (1)已知等边三角形 ABC 的边长为 1,那么 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ ( )

A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

(2)已知单位向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°,若向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,则实数 λ 的取值范围为________.

[答案] (1)D (2)$(-2-\sqrt{3},-1)\cup(-1,-2+\sqrt{3})$

[解析] (1)因为等边三角形 ABC 的边长为 1,所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times1\times\cos 60°+1\times1\times$

$\cos 60°+1\times1\times\cos 120°=\frac{1}{2}$. 故选 D.

(2)由题意可知，$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}^2+\lambda\boldsymbol{b}^2+(1+\lambda^2)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，即 $\lambda^2+4\lambda+1<0$，解得 $-2-\sqrt{3}<\lambda<-2+\sqrt{3}$，∵向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，∴向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 不能反向共线，即 $\lambda\neq-1$，故实数 λ 的取值范围为 $(-2-\sqrt{3},-1)\cup(-1,-2+\sqrt{3})$.

【易错易混 2】投影向量的概念

投影向量是向量，不是数量. 如：对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，设与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$.

例 2 已知平面向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 满足 $|\boldsymbol{e}_2|=2|\boldsymbol{e}_1|=2$，$\boldsymbol{e}_2$ 在 $\boldsymbol{e}_1$ 上的投影向量为 $-\boldsymbol{e}_1$，则 $\boldsymbol{e}_1$ 在 $\boldsymbol{e}_2$ 上的投影向量为________.

[答案] $-\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_2$

[解析] 因为 $\boldsymbol{e}_2$ 在 $\boldsymbol{e}_1$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1|}\frac{\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{e}_1|}=(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_1$，所以 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=-1$，则 $\boldsymbol{e}_1$ 在 $\boldsymbol{e}_2$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_2|}\frac{\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_2|}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_2$.

层级2 解题方法拓展

【方法解读 1】类比法之实数乘法与平面向量数量积运算律

运算律	实数乘法	向量数量积
交换律	$ab=ba$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
结合律	$(\lambda a)\cdot b=a\cdot(\lambda b)$	$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$
分配律	$(a+b)c=ac+bc$，$(a-b)c=ac-bc$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

例 3 (多选题)关于平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，下列判断错误的是 ( )

A. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

B. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

C. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

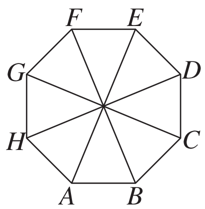
D. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

[答案] CD

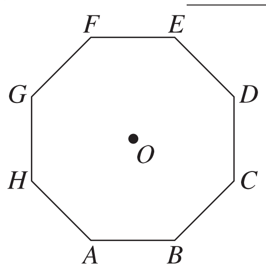
[解析] 对于 A，由向量数量积的运算律，得 A 中判断正确；对于 B，平面向量的数量积满足分配律，B 中判断正确；对于 C，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，当 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 时，满足题设，但 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 不一定为零向量，即 $\boldsymbol{b}$ 不一定与 $\boldsymbol{c}$ 相等，C 中判断错误；对于 D，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 是与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，D 中判断错误. 故选 CD.

【方法解读 2】平面向量数量积定义——投影向量的应用

例 4 (1)如图所示是正八边形 $ABCDEFGH$，其中 $AB=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HD}=$________.



第(1)题图

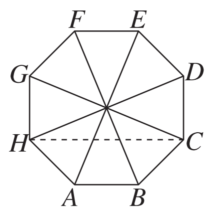


第(2)题图

(2)八边形是数学中的一种图形，是由八条线段首尾相连围成的封闭图形，它有八条边、八个角. 八边形可分为正八边形和非正八边形. 如图所示，在边长为 2 的正八边形 $ABCDEFGH$ 中，点 O 为正八边形的中心，点 P 是其内部及边界上任意一点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{PA}$ 的取值范围是________________.

[答案] (1)$1+\sqrt{2}$ (2)$[-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2}]$

[解析] (1)如图，在正八边形 $ABCDEFGH$ 中，连接 HC，则 $HC/\!/AB$，而 $\angle ABC=135°$，则 $\angle BCH=45°$，于是 $\angle HCD=90°$，在等腰梯形 $ABCH$ 中，$CH=1+2\times1\times\cos 45°=1+\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HD}=1\times|\overrightarrow{HD}|\cos\angle CHD=|\overrightarrow{HC}|=1+\sqrt{2}$.



(2)由题意可知 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF})$，又 $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{BO}$，所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=$

$2|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$. 当点 P 在线段 CD 上时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$ 最大，因为正八边形外角为 $\frac{\pi}{4}$，边长为 2，所以此时 $|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2+\sqrt{2}$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BA}=2\times(2+\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}$；当点 P 在线段 GH 上时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$ 最小，为 $-\sqrt{2}$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BA}=-2\sqrt{2}$. 所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{PA}$ 的取值范围是 $[-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2}]$.

【方法解读 3】求平面向量的数量积、夹角、模的方法

1. (1)求平面向量数量积的步骤：

第一步，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta(0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ)$；第二步，分别求 $|\boldsymbol{a}|$ 和 $|\boldsymbol{b}|$；第三步，再求两向量的数量积，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

(2)由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积可知，若它们的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，因此 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，这是我们求两向量夹角余弦值的公式. 特别地，若 $\theta=0^\circ$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；若 $\theta=180^\circ$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；若 $\theta=90^\circ$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 运用这一结论不仅可以判断 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否共线或垂直，还可以判断三角形的形状.

(3)根据数量积的定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos0^\circ=|\boldsymbol{a}|^2$，得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$，这就是求模的方法，即要求一个向量的模，先求这个向量与自身的数量积(一定非负)，再求它的算术平方根，即为模. 对于复杂的向量也是如此，例如，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，可先求 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，再求其算术平方根，即为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$ 常常被用来求解和、差向量的模，求解时需灵活转化.

2. 构图法解决平面向量有关模、夹角、垂直的问题

构图法是当平面向量的模、夹角等出现特殊值时，构造特殊的直角三角形、矩形、正方形或者圆等图形解决问题.

例 5 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=61$. 求：

(1) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ；

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

解：(1)由 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}^2-3\boldsymbol{b}^2+(2-6)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=61$，$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，

$\therefore\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-6}{4\times3}=-\frac{1}{2}$，又 $\because 0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$\therefore\theta=\frac{2\pi}{3}$.

(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=13$，$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=37$，$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{37}$.

例 6 (1)若 $\sqrt{3}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，则向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

(2)已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为平面向量，若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，则 $\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=$ ( )

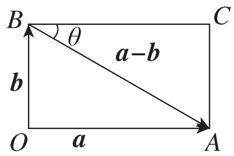
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(3)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $|2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ 的取值范围是 ( )

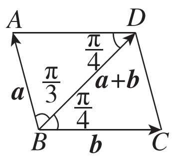
A. $[1,3]$　　B. $[2,4]$　　C. $[3,5]$　　D. $[4,6]$

[答案] (1)A　(2)D　(3)C

[解析] (1)方法一：由条件可知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，两边平方后整理得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，又 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}|\boldsymbol{a}|$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}|\boldsymbol{a}|^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为向量夹角的范围是 $[0,\pi]$，所以向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

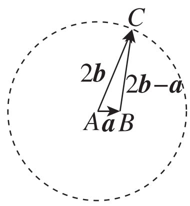


方法二：因为 $\sqrt{3}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，构造矩形如图，又 $|\boldsymbol{a}|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$.



(2)如图，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 在 $\triangle ABD$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|$，$|\overrightarrow{AD}|=|\boldsymbol{b}|$，$\angle ABD=\frac{\pi}{3}$，$\angle ADB=\frac{\pi}{4}$，由三角形面积公式可得 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\sin\angle ABD=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{AD}|\cdot\sin\angle ADB$，则 $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即 $\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3)设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$2\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$，则 $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC}$，因为 $|\boldsymbol{b}|=2$，所以 $|2\boldsymbol{b}|=4$，所以点 C 的轨迹是以 A 为圆心，4 为半径的圆，如图，由图知，当 $2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线时，$|2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ 取得最值，由图易知 $|2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{\max}=5$，$|2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|_{\min}=3$，所以 $|2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ 的取值范围是 $[3,5]$.



【教材拓展】强基固本

例 7 （多选题）设平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|\leqslant 2$，$|\boldsymbol{b}|\leqslant 1$，且 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{c}|$ 的 （　　）

A. 最大值为 $4\sqrt{2}$　　　　B. 最大值为 $2\sqrt{6}$

C. 最小值为 0　　　　D. 最小值为 $\sqrt{2}$

[答案] AC

[解析] 由 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\geqslant|\boldsymbol{c}|-|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$ 得 $|\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$，令 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{m}|$，$|\boldsymbol{n}|$ 分别是以 $\boldsymbol{a}$，$2\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线的长，则 $\dfrac{|\boldsymbol{m}|+|\boldsymbol{n}|}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{|\boldsymbol{m}|^2+|\boldsymbol{n}|^2}{2}}=\sqrt{\dfrac{2(\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2)}{2}}\leqslant\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，所以 $(|\boldsymbol{m}|+|\boldsymbol{n}|)_{\max}=4\sqrt{2}$，当且仅当 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时得到最大值，所以 $|\boldsymbol{c}|_{\max}=4\sqrt{2}$，显然 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时 $|\boldsymbol{c}|=0$，所以 $|\boldsymbol{c}|_{\min}=0$. 故选 AC.

6.3　平面向量基本定理及坐标表示

层级1　知识易错易混

【知识导图】

平面向量基本定理及坐标表示

- 基本定理
  - 定理：如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$
  - 基底：不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 叫作表示这一平面内所有向量的一个基底
- 坐标运算
  - 加法、减法、数乘：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$，$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$
  - 向量坐标的求法：若向量的起点是坐标原点，则终点坐标即为向量的坐标.设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- 平面向量共线的坐标表示
  - 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$
  - (1) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件不能表示为 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$，因为 x_2，y_2 有可能为0
  - (2)当且仅当 $x_2y_2\neq0$ 时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 与 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$ 等价，即两个不平行于坐标轴的共线向量的对应坐标成比例
- 数量积
  - 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，则
  - ① $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$，
  - ③ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$，④ $\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$
- 常用知识
  - 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda=\mu=0$
  - 已知 P 为线段 AB 的中点，若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 P 点的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$
  - 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

【易错易混 1】对平面向量基本定理的理解出错

(1)基向量:平面向量基本定理的前提是作为基底的向量不共线,因为零向量与任意向量共线,所以作为基底的向量不可以有零向量.在同一平面内,作为基底的向量的选择不唯一,只要它们不共线即可.

(2)实数唯一性:在平面内,任一向量都可以沿两个不共线的方向分解成两个向量的和,且这样的分解是唯一的.同一非零向量在不同基底下的分解式是不同的.

例 1 设$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$是平面向量的一个基底,则以下四个选项中可以作为平面向量的一组基底的是 ( )

A. $2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$

B. $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 和 $6\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1$

C. $-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ 和$-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1$

D. $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$

[答案] D

[解析] 对于 A,$\because 2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1=2\left(\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\right)$,$\therefore 2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$ 共线,A 不符合题意;对于 B,$-3(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)=6\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1$,$\therefore \boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 和 $6\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1$ 共线,B 不符合题意;对于 C,$-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=-3\left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1\right)$,$\therefore -\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ 和$-\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1$ 共线,C 不符合题意;对于 D,不存在实数 λ,使 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$,$\therefore \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 不共线,D 符合题意.故选 D.

【易错易混 2】混淆平面向量共线与垂直的坐标表示

平面向量共线的坐标表示:设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,则向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$.

平面向量垂直的坐标表示:设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是非零向量,$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

例 2 (1)已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,\lambda)$,且$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})/\!/(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,则 $\lambda=$________.

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(3,x)$,若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则 $x=$______.

[答案] (1)$\frac{1}{2}$ (2)-1

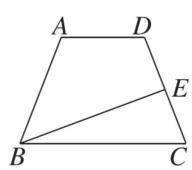
[解析] (1)由题可知 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(2,1)+2(1,\lambda)=(4,1+2\lambda)$,$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(2,1)-(1,\lambda)=(3,2-\lambda)$,由$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})/\!/(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,得 $4(2-\lambda)=3(1+2\lambda)$,解得 $\lambda=\frac{1}{2}$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(3,x)$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,x+2)$,因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,所以$-1\times2+2(x+2)=0$,解得 $x=-1$.

层级2 解题方法拓展

【方法解读 1】用基底表示向量

例 3 如图,在梯形 $ABCD$ 中,$BC=2AD$,$DE=EC$,设 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{BE}=$ ( )



A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$

B. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$

D. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

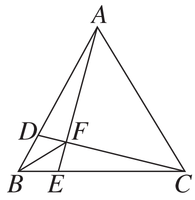
[答案] C

[解析] 由 $DE=EC$ 得 E 为 CD 的中点,故 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$.故选 C.

【方法解读 2】利用平面向量基本定理求参数

用平面向量基本定理解决问题的一般思路:先选择一个基底,并运用该基底将条件和结论表示成向量的形式,再通过向量的运算来解决.注意同一个向量在不同基底下的分解是不同的,但在每个基底下的分解都是唯一的.

例 4 如图,在$\triangle ABC$中,点D,E分别在边AB,BC上,且均为靠近B的四等分点,CD与AE交于点F,若$\overrightarrow{BF}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$,则$3x+5y=$________.



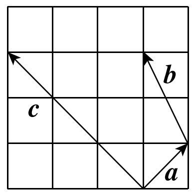
[答案] $\frac{8}{5}$

[解析] 因为A,F,E三点共线,所以存在$m\in\mathbf{R}$,使得$\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{AE}$,即$\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}=m(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA})=m\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)$,可得$\overrightarrow{BF}=(1-m)\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}m\overrightarrow{BC}$. 因为$C,F,D$三点共线,所以存在$n\in\mathbf{R}$,使得$\overrightarrow{CF}=n\overrightarrow{CD}$,即$\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=n(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})=n\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)$,可得$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}n\overrightarrow{BA}+(1-n)\overrightarrow{BC}$. 因为$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$不共线,所以$\begin{cases}1-m=\frac{1}{4}n,\\1-n=\frac{1}{4}m,\end{cases}$解得$m=n=\frac{4}{5}$,所以$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$,又因为$\overrightarrow{BF}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$,所以$x=y=\frac{1}{5}$,因此$3x+5y=\frac{8}{5}$.

【方法解读 3】平面向量线性运算与数量积的坐标表示

通过建立平面直角坐标系,利用"坐标化思想"解决平面向量线性运算与数量积的有关问题.

例 5 (1)已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$在坐标纸(规定小方格的边长为1)中的位置如图所示,则 ( )



A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$

B. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$

C. $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$

D. $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$

(2)(多选题)已知向量$\boldsymbol{a}=(3,-4)$,$\boldsymbol{b}=(2,t)$,则 ( )

A. 与向量$\boldsymbol{a}$平行的单位向量为$\boldsymbol{e}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$

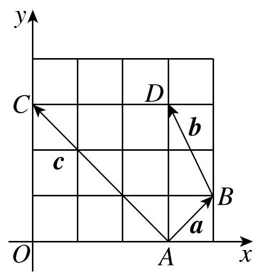
B. 当$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$时,$t=\frac{3}{2}$

C. 当$t=1$时,向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{2}{5}\boldsymbol{b}$

D. 若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为锐角,则t的取值范围为$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$

[答案] (1)D (2)BC

[解析] (1)如图,建立平面直角坐标系xOy,则$A(3,0)$,$B(4,1)$,$C(0,3)$,$D(3,3)$,于是$\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2)$,$\boldsymbol{c}=(-3,3)$. 对于A,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1,1)+(-1,2)+(-3,3)=(-3,6)\neq\mathbf{0}$,故A错误;对于B,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1,1)-(-1,2)+(-3,3)=(-1,2)\neq\mathbf{0}$,故B错误;对于C,$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1,1)+2(-1,2)+(-3,3)=(-4,8)\neq\mathbf{0}$,故C错误;对于D,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1,1)-2(-1,2)+(-3,3)=(0,0)=\mathbf{0}$,故D正确. 故选D.



(2)对于A,与向量$\boldsymbol{a}$平行的单位向量为$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}(3,-4)=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$或$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$,故A错误;对于B,当$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-4)\cdot(2,t)=6-4t=0$,解得$t=\frac{3}{2}$,故B正确;对于C,当$t=1$时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-4)\cdot(2,1)=6-4=2$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,则向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{2}{5}\boldsymbol{b}$,故C正确;对于D,若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为锐角,则$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6-4t>0,\\3t\neq-8,\end{cases}$解得$t<\frac{3}{2}$且$t\neq-\frac{8}{3}$,故D错误. 故选BC.

【方法解读 4】解决平面向量数量积的最值与范围问题的常用方法

引入坐标系之后,解决平面向量数量积的常用方法有以下三种:投影法、坐标法、基底法.

例 6 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 ( )

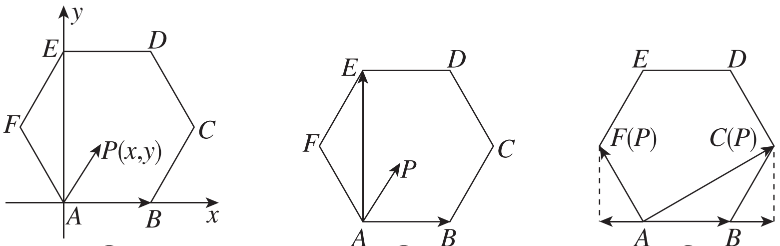
A. $(-2,6)$　　B. $(-6,2)$　　C. $(-2,4)$　　D. $(-4,6)$

[答案] A

[解析] 方法一：以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴的正方向，建立如图①所示的平面直角坐标系，设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(x,y)$，$\because -1<x<3$，$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2x\in(-2,6)$.

方法二：如图②，以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\}$ 为基底，则 $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\pi}{2}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{3}$. $\because P$ 为正六边形内一点，$\therefore \overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AE}$，$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AB}^2=4x$. $\because -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，$\therefore -2<\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}<6$.

方法三：作出正六边形 $ABCDEF$，如图③所示，P 是正六边形内一点，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$，$|\overrightarrow{AB}|=2$. 由图可得，当 P 位于 C 处时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$ 最大，又 $BC=2$，$\angle CAB=30°$，故此时 $|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\times3=6$；当 P 位于 F 处时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$ 最小，又 $AF=2$，$\angle FAB=120°$，故此时 $|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\times(-1)=-2$. $\because P$ 在正六边形内，$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围为 $(-2,6)$. 故选 A.



①　②　③

【方法解读 5】平面向量坐标运算与平面几何交汇应用

例 7 (1)(多选题)已知在平面直角坐标系中，点 $P_1(0,1)$，$P_2(4,4)$. 当 P 是线段 P_1P_2 的一个三等分点时，点 P 的坐标可以为 ( )

A. $\left(\frac{4}{3},2\right)$　　B. $\left(\frac{4}{3},3\right)$　　C. $(2,3)$　　D. $\left(\frac{8}{3},3\right)$

(2)设向量 $\boldsymbol{a}=(-6,8)$，$\boldsymbol{b}=(3,4)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$，$t\in\mathbf{R}$，若 $\boldsymbol{c}$ 平分 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，则 t 的值为________.

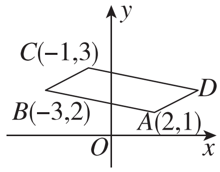
[答案] (1)AD　(2)2

[解析] (1)设 $P(x,y)$，$\because P$ 是线段 P_1P_2 的一个三等分点，$\therefore \overrightarrow{P_1P}=2\overrightarrow{PP_2}$ 或 $\overrightarrow{P_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PP_2}$，则 $(x,y-1)=2(4-x,4-y)$ 或 $(x,y-1)=\frac{1}{2}(4-x,4-y)$，即 $\begin{cases}x=8-2x,\\y-1=8-2y\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2-\frac{x}{2},\\y-1=2-\frac{y}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{8}{3},\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\y=2.\end{cases}$ 故选 AD.

(2)方法一：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=(-6+3t,8+4t)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-6(-6+3t)+8(8+4t)=100+14t$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=3(-6+3t)+4(8+4t)=25t+14$，$|\boldsymbol{a}|=10$，$|\boldsymbol{b}|=5$，因为 $\boldsymbol{c}$ 平分 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$，即 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}$，所以 $\frac{100+14t}{10|\boldsymbol{c}|}=\frac{25t+14}{5|\boldsymbol{c}|}$，所以 $100+14t=2(25t+14)$，解得 $t=2$.

方法二：因为 $\boldsymbol{c}$ 平分 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，所以 $\boldsymbol{c}=\lambda\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right)=\lambda\left(\frac{(-6,8)}{10}+\frac{(3,4)}{5}\right)=\lambda\left(0,\frac{8}{5}\right)$，又因为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=(-6+3t,8+4t)$，所以 $0\times(8+4t)=\frac{8}{5}(-6+3t)$，解得 $t=2$.

(3)如图,平面上点 A,B,C 的坐标分别为 $(2,1),(-3,2),(-1,3)$.



①写出向量 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ 的坐标;

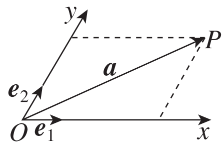
②如果四边形 $ABCD$ 是平行四边形,求 D 的坐标.

解:①$\overrightarrow{AC}=(-1-2,3-1)=(-3,2)$,$\overrightarrow{BC}=(-1+3,3-2)=(2,1)$.

②设 $D(x,y)$,则 $\overrightarrow{AD}=(x-2,y-1)$,因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$,

所以 $\begin{cases}x-2=2,\\y-1=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\y=2,\end{cases}$ 所以 $D(4,2)$.

【教材拓展】平面向量斜坐标系



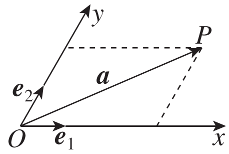
如图,设 Ox,Oy 是平面内相交成 θ 角的两条数轴,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 分别是与 x 轴、y 轴正方向同向的单位向量,若向量 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,则把有序数对 (x,y) 叫作向量 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标系 xOy 中的坐标.

将向量运算推广:其中 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\cos\theta$.

(1)$|\overrightarrow{OP}|^2=x^2+y^2+2xy\cos\theta$;

(2)若 $\overrightarrow{OQ}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2=(a,b)$,则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=ax+by+(bx+ay)\cos\theta$.

例 8 [教材 P37T15 改编] 如图,设 Ox,Oy 是平面内相交成 $60°$角的两条数轴,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 分别是与 x 轴、y 轴正方向同向的单位向量,若向量 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,则把有序数对 (x,y) 叫作向量 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标系 xOy 中的坐标,设 $\overrightarrow{OP}=3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.



(1)计算 $|\overrightarrow{OP}|$ 的大小.

(2)根据平面向量基本定理判断,本题中对向量坐标的规定是否合理.

(3)若 $\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{OB}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2$,有同学认为"$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$"的充要条件是"$x_1x_2+y_1y_2=0$",你认为是否正确?若正确,请给出证明;若不正确,请说明理由.

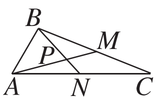
解:(1)因为 $\overrightarrow{OP}=3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$,所以 $|\overrightarrow{OP}|^2=3^2+2^2+2\times3\times2\cos60°=19$,所以 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{19}$.

(2)$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 作为一组基底,对于任意向量 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,$x,y$ 都是唯一确定的,所以本题中对向量坐标的规定合理.

(3)不正确.理由如下:因为 $\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{OB}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2)\cdot(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2)=x_1x_2\boldsymbol{e}_1^2+y_1y_2\boldsymbol{e}_2^2+(x_1y_2+x_2y_1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=x_1x_2+y_1y_2+\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1)$.若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,所以 $x_1x_2+y_1y_2+\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1)=0$;反之若 $x_1x_2+y_1y_2+\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1)=0$,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,则 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

所以"$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$"的充要条件是"$x_1x_2+y_1y_2+\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1)=0$",故该同学的说法错误.

【拓展】尝试用斜坐标系解下面问题



如图,在△ABC 中,已知 $AB=2,AC=5,\angle BAC=60°$,BC,AC 边上的两条中线 AM,BN 相交于点 P,求$\angle MPN$ 的余弦值.

解:依题意,$AB=2,AC=5,\angle BAC=60°$,分别以 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ 为 x,y 轴的正方向,并在 x,y 轴上分别取与正方向同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$,则 $\overrightarrow{AC}=(5,0)$,$\overrightarrow{AB}=(0,2)$,$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}$,

所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\left(\frac{5}{2},1\right)$,$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{5}{2},-2\right)$,所以 $|\overrightarrow{AM}|^2=\frac{25}{4}+1+5\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{39}{4}$,$|\overrightarrow{BN}|^2=\frac{25}{4}+4-10\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{21}{4}$,$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{25}{4}-2-\frac{5}{2}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=3$,

所以 $\cos\angle MPN=\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{39}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{91}}{91}$.